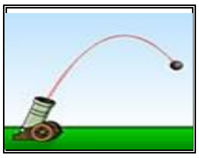
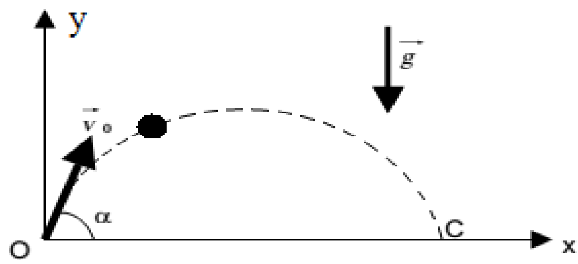


CHIMIE / Unité :4
Evolution temporelle des systèmes mécaniques

Chapitre III
Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme 1/3

1- Lancer d'un projectile



Un projectile est lancé à l'instant t = 0 avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale.
On assimile le projectile à un point matériel ce qui nous permet de le réduire au mouvement de son centre d'inertie M.
L'étude est réalisée avec les approximations suivantes :
• On considère que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme,
• On néglige la poussée d'Archimède et les frottements par rapport au poids du système.
On étudie le mouvement du projectile dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen avec une bonne approximation, muni d'un repère cartésien (Oxyz).
Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) qui contient les vecteurs $\vec{v_0}$ et $\vec{g}$.
O est la position initiale du projectile M. Dans ce système d'axes, les coordonnées du vecteur vitesse initiale son

2- Vecteur accélération

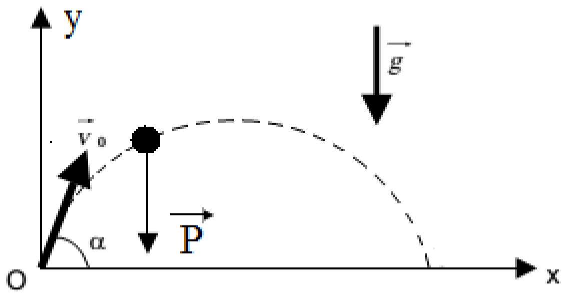
- Système étudié : {projectile}
- Référentiel terrestre : référentiel considéré comme galiléen R(O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$;$\vec{k}$) car la durée de la chute est faible devant la période de rotation de la Terre (24 h).
- Bilan des forces extérieures

poids : $\vec{p}$=p.$\vec{k}$= -m.g. $\vec{j}$

Remarque : Le projectile est soumis à une seule force, son poids. On dit dans ce cas que le projectile est en chute libre.

- La deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$\boldsymbol{\vec{p}}$=m.$\boldsymbol{\vec{a_G}}$



En projetant de cette relation vectorielle sur les trois axes, on obtient les composantes du vecteur accélération:

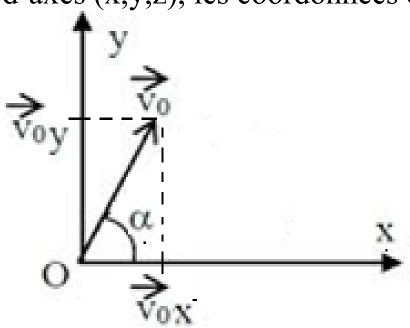
$$\begin{cases} \vec{P_x} = m.\vec{a_x} \\ \vec{P_y} = m.\vec{a_y} \\ \vec{P_z} = m.\vec{a_z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m.a_x \\ -P = m.a_z \\ 0 = m.a_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Remarque :
$a_x = 0$: mouvement rectiligne uniforme
$a_y = -g$: mouvement rectiligne uniformément varié
L'accélération, et donc le mouvement du projectile, ne dépendent pas de sa masse :

3- Vecteur vitesse instantanée

A l'instante t=0

Dans système d'axes (x,y,z), les coordonnées du vecteur vitesse initiale (t=0) sont :



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0.\sin(\alpha) \end{cases}$$

A l'instant t
Pour obtenir les trois coordonnées du vecteur vitesse, il suffit de trouver la primitive de ces trois coordonnées par rapport au temps.
la deuxième loi de Newton conduit, par projection sur les axes Ox et Oy, au système suivant :

$$a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}$$
donc
$$v_y(t) = \int a_y dt$$
$$v_y(t) = a_y.t + C_1'$$

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$$
donc
$$v_x(t) = \int a_x dt$$
$$v_x(t) = a_x.t + C_1$$

Où C'_1 et C_1 sont des constantes d'intégration déterminées grâce aux conditions initiales. À l'instant initial, $\overrightarrow{v_0}$ de coordonnées: $\begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0.\sin(\alpha) \end{cases}$

$$v_y(0) = a_y.0 + C_1' \rightarrow C'_1 = v_0.\sin(\alpha)$$
$$v_y(t) = -g.t + v_0.\sin(\alpha)$$

$$v_x(0) = a_x.0 + C_1 \rightarrow C_1 = v_0.\cos(\alpha)$$
$$v_x(t) = v_0.\cos(\alpha)$$

La vitesse horizontale est constante, donc le mouvement horizontal est uniforme. Le mouvement vertical, lui, est uniformément accéléré car l'accélération verticale est constante.

4-Les équations horaires
le système d'équations donnant les coordonnées du vecteur vitesse s'écrit également:

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_y$$
$$y(t) = \int v_y(t)dt = \int (a_y.t + v_{0y})dt$$
$$y(t) = \frac{1}{2}.a_y.t^2 + v_{0y}.t + C_2'$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$
$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int (a_x.t + v_{0x})dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2}.a_x.t^2 + v_{0x}.t + C_2$$

où C'_2 et C_2 sont des constantes d'intégration déterminées grâce aux conditions initiales sur la position. À l'instant initial, M est au point 0, donc ses coordonnées sont nulles : $x_0 = 0$; $y_0 = 0$

$$y(t) = \frac{1}{2}.a_y.t^2 + v_{0y}.t + C_2'$$
$$C_2' = y_0 = 0$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin(\alpha).t$$

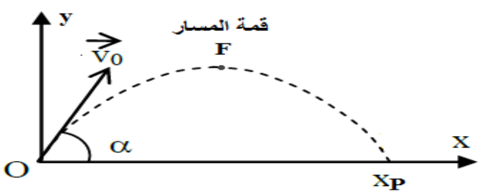
$$x(t) = \frac{1}{2}.a_x.t^2 + v_{0x}.t + C_2$$
$$C_2 = x_0 = 0$$
$$x(t) = v_0.\cos(\alpha).t$$

5- Équation cartésienne de la trajectoire
Il s'agit d'exprimer y en fonction de x en éliminant le paramètre temps entre les deux équations horaires x(t) et y(t). L'équation horaire $x(t) = v_0.\cos(\alpha).t$ conduit à écrire : $t = \frac{x}{v_0.\cos(\alpha)}$
En remplaçant t par cette expression dans l'équation horaire de y, l'équation cartésienne de la trajectoire est donc :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{[v_0.\cos(\alpha)]^2} + \tan(\alpha).x$$

Remarque : Il s'agit d'une parabole, dans le plan de tir, incurvée vers le bas.

6- Caractéristiques de la trajectoire
6- 1- La flèche
C'est la distance entre le sommet de la trajectoire et l'axe des abscisses.



Au point F alors $\left.\frac{dy}{dx}\right)_F = 0$ ou $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right)_F = v_y(F) = 0$

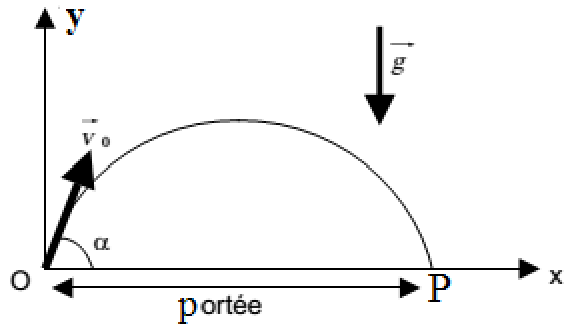
Méthode 1	Méthode 2
On a : $y(t) = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{[v_0.\cos(\alpha)]^2} + \tan(\alpha).x$ **donc** $\left.\frac{dy}{dx}\right)_F = 0 = -g.\frac{x_F}{[v_0.\cos(\alpha)]^2} + \tan(\alpha).$ Alors : $x_F = \frac{{v_0}^2.\sin(2\alpha)}{2.g}$ N.B $\sin(2\alpha)=2.\sin(\alpha).\cos(\alpha)$ D'après l'équation de trajectoire : $y_F = -\frac{1}{2}g.\frac{x_F^2}{[v_0.\cos(\alpha)]^2} + \tan(\alpha).x_F$ $y_F = \frac{{v_0}^2.\sin^2(\alpha)}{2.g}$	Le sommet est atteint lorsque $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right)_F = v_y(F) = 0$ et ceci est vrai à la date t $0 = -g.t_F + v_0.\sin(\alpha)$ $t_F = \frac{v_0.\sin(\alpha)}{g}$ En introduisant cette expression de t_s dans y(t), il vient : $\begin{cases} x_F = v_0.\cos(\alpha).t_F \\ y_F = -\frac{1}{2}g.t_F^2 + v_0.\sin(\alpha).t_F \end{cases}$ En déduire : $x_F = \frac{{v_0}^2.\sin(2\alpha)}{2.g}$ $y_F = \frac{{v_0}^2.\sin^2(\alpha)}{2.g}$

La flèche de la trajectoire, hauteur maximale atteinte, s'écrit : $y_F = \frac{{v_0}^2.\sin^2(\alpha)}{2.g}$

6- 2-La portée

La portée est l'abscisse x_p du point P, dont l'ordonnée y_p est nulle. C'est le point du sol sur lequel arrive le projectile après sa chute.

Ceci conduit à résoudre l'équation y = 0, soit par :



Méthode 1	Méthode 2
$-g.\frac{{x_P}^2}{[v_0.\cos(\alpha)]^2} + \tan(\alpha).x_P = 0$ En factorisant par x on montre qu'il existe deux solutions : $(-g.\frac{x_P}{[v_0.\cos(\alpha)]^2} + \tan(\alpha)).x_P = 0$ la solution x = 0 qui correspond au point de lancer O, l'autre solution qui est donc x_p et qui vérifie $x_p = \frac{{v_0}^2.\sin(2\alpha)}{g}$ N.B $\sin(2\alpha)=2.\sin(\alpha).\cos(\alpha)$	$0 = -\frac{1}{2}g.{t_P}^2 + v_0.\sin(\alpha).t_P$ $t_F = 2.\frac{v_0.\sin(\alpha)}{g}$ On reporte t_F dans l'équation horaire $y_P = -\frac{1}{2}g.t_P^2 + v_0.\sin(\alpha).t_P$=0 donc $x_p = \frac{{v_0}^2.\sin(2\alpha)}{g}$

- Appliquer la deuxième loi de Newton à un projectile dans un champ de pesanteur uniforme.
- Montrer que le mouvement est plan.
- Etablir l'équation de la trajectoire à partir des équations horaires paramétriques.
- Savoir exploiter un document expérimental reproduisant la trajectoire d'un projectile: tracer des vecteurs vitesse et accélération, trouver les conditions initiales.