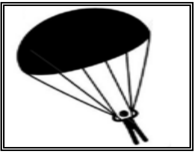


CHIMIE / Unité :4
Evolution temporelle des systèmes mécaniques

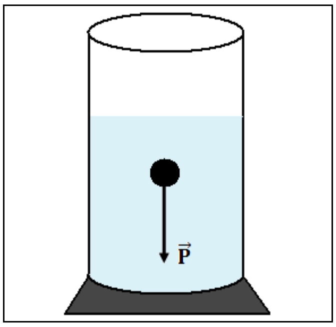
Chapitre II
Mouvement de chute verticale d'un solide

I- Chute verticale dans un fluide

1- Forces exercées sur le solide dans un fluide

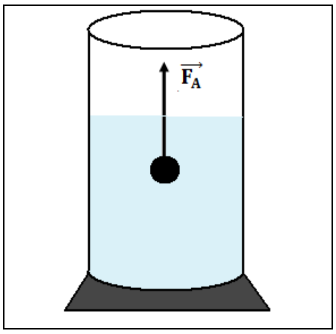
Soit un solide S en mouvement de chute verticale dans un fluide. Ce solide est soumis à trois forces :

1-1- Force de pesanteur ou poids :



Un objet situé au voisinage de la Terre subit la force de gravitation $\vec{P}$ qui peut s'identifier à la force de pesanteur $\vec{P}$.
Définition : On dit que la Terre crée un champ de pesanteur $\vec{g}$. Un objet de masse m placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ subit une force $\vec{P}=m\vec{g}$.
Remarque : Le champ de pesanteur est supposé uniforme ($\vec{g}$ est le même en tout point) dans une zone pas trop étendue au voisinage de la Terre (en réalité, g diminue avec l'altitude).

1-2-Force exercée par le fluide : poussée d'Archimède

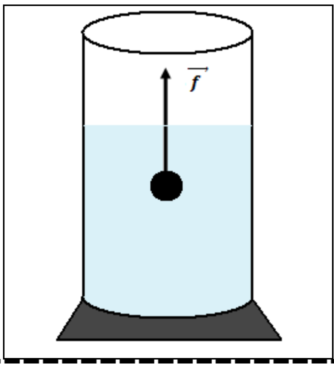


Un corps totalement ou partiellement immergé dans un fluide subit une force $\overrightarrow{F_a}$ verticale, de bas en haut, de valeur égale au poids du fluide déplacé appelée poussée d'Archimède.

$$\overrightarrow{F_a} = -\rho_f . V_s . \vec{g}$$

F_a: *pousséed'Archimè* (N)
ρ_f.:*volumiquedufluide*$(kg.m^{-3})$
V_s :*volume de laparti eimmergé du solide* (m^3)
g:*valeurdu champ de pesanteur*

1-3-Force de frottement exercée par le fluide



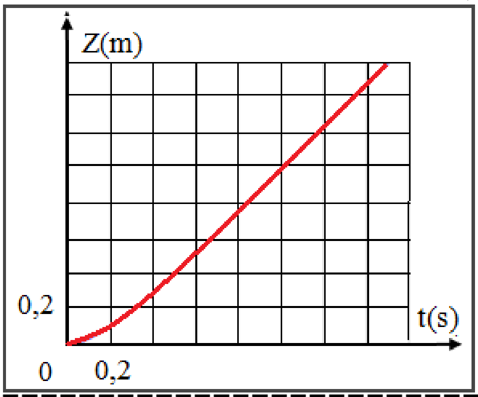
Soit un solide de vitesse $\vec{v}$. Le fluide exerce sur ce solide une force de frottement.
Dans le cas d'une chute verticale dans un fluide, la force de frottement est de la forme $\vec{f}=-k.\vec{v^n}$.
Avec k le facteur k dépend de tout ce qui peut faire varier$f$, c'est à dire la forme de l'objet, ça taille, l'aspect de sa surface ou encore la nature du fluide.
➪ La force $\vec{f}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}$ mais de sens opposé.
Pour des vitesses plus importantes, f peut être de la forme $f=kv^2$.
➪ Si la vitesse est faible alors la force a pour valeur $f=k.v$
➪ Si la vitesse est plus importante alors on a une valeur correspondant à $f=k.v^2$

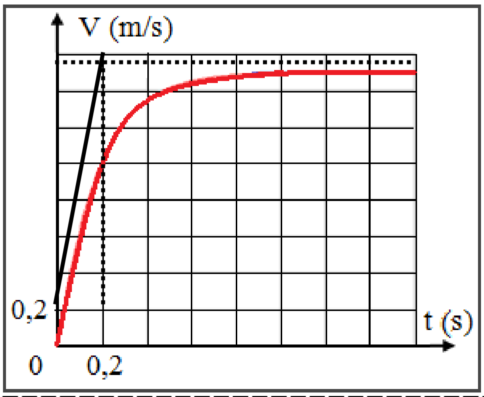
II- Etude de la chute verticale dans un fluide .

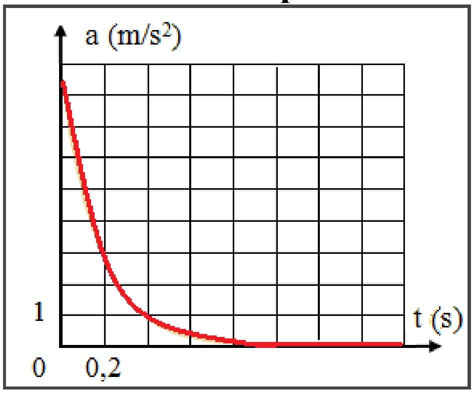
1- Etude expérimentale

Abandonnons en O une bille d'acier, de masse m = 5,0 g et de rayon r = 0,5 cm, sans vitesse initiale dans un mélange d'eau et de glycérol à 64 % de masse volumique ρ_f = 1260 kg.m^{-3}.
Etudions la bille en chute verticale sur l'axe z'Oz dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

1-1- Evolution de l'ordonnée, de la vitesse et de l'accélération au cours du temps





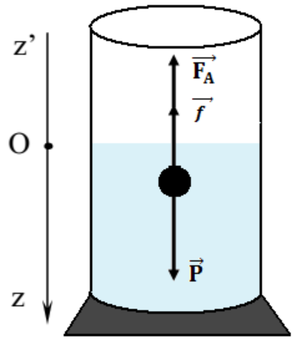


1-2- Description du mouvement

A l'instant du lâcher, la bille tombe dans le fluide avec une vitesse croissante : c'est le **régime initial** ;
Au cours de la chute, la vitesse continue d'augmenter, mais moins rapidement : c'est le **régime transitoire**;
Si la chute dure suffisamment longtemps, la bille atteint une vitesse limite : c'est le **régime permanent**.

2- Etude théorique

2-1- L'équation différentielle du mouvement



- Système étudié : {bille}
- Référentiel terrestre : référentiel considéré comme galiléen car la durée de la chute est faible devant la période de rotation de la Terre (24 h).
- Bilan des forces extérieures

poids : $\vec{p}=p.\vec{k}=m.g.\vec{k}$

Poussée d'Archimède : $\vec{F_a}=-F_a\vec{k}=-\rho_f.V.g.\vec{k}$

Force de frottement exercée par le fluide : $\vec{f}=-f\,\vec{k}=-k.v^n.\vec{k}$

La deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$\vec{p}+\vec{F_a}+\vec{f}=m.\vec{a_G}$ donc $m.g.\vec{k}-K.v^n\,\vec{k}-\rho_f.V.g.\vec{k}=m.\vec{a_G}$

– La projection de cette relation vectorielle sur l'axe z'Oz nous conduit à :

$$m.g-K.{v_Z}^n-\rho_f.V.g=m.a_{GZ} \quad \text{avec} \begin{cases} a_{GZ}=a_G=\frac{dv}{dt} \\ v_Z=v \end{cases}$$

$$m.g-K.v^n-\rho_f.V.g=m.a_G$$

Alors l'équation différentielle du mouvement est : $\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v^n+g-\frac{\rho_f.V.g}{m}$

On pose : $\begin{cases} a_Z=\frac{dv}{dt} \\ A=g-\frac{\rho_f.V.g}{m} \\ B=\frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}=A-Bv^n$

2-2- Les caractéristiques du mouvement

A -Notion de vitesse limite : v_{lim}

- Une fois le régime permanent atteint v = cste donc l'accélération est nulle $a_G=\frac{dv}{dt}=0$, soit

L'équation du mouvement s'écrit alors : $A-Bv^n=0$

Donc $v_{lim}=\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\sqrt[n]{\frac{m}{k}\left(g-\frac{\rho.V_{solide}.g}{m}\right)}$

Pour un frottement fluide laminaire n=1 : $v_{lim}=\frac{A}{B}=\frac{m}{k}\left(g-\frac{\rho.V_{solide}.g}{m}\right)$

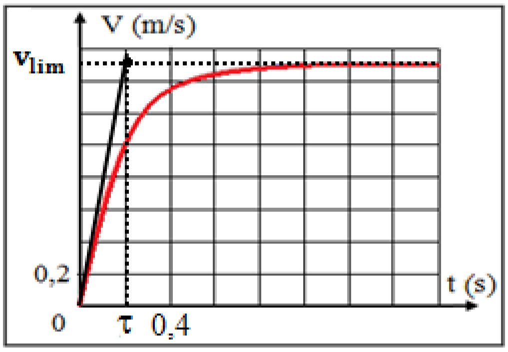
Pour un frottement fluide turbulent n=2 : $v_{lim}=\sqrt{\frac{A}{B}}=\sqrt{\frac{m}{k}\left(g-\frac{\rho.V_{solide}.g}{m}\right)}$

B- Accélération initiale

:A t=0 $a_0=\left.\frac{dv}{dt}\right)_0=-\frac{k}{m}v_0^n+g-\frac{\rho.V_{solide}.g}{m}$

Dans le cas $v_0=0$: $a_0=g-\frac{\rho.V_{solide}.g}{m}$

C- Notion de temps caractéristique



Détermination expérimentale

Le temps caractéristique peut être déterminé en traçant la tangente à la courbe à t = 0 s : l'abscisse du point d'intersection de cette tangente et de l'asymptote à la courbe a pour valeur τ.

D'après la courbe on a : $a_0=\left.\frac{dv}{dt}\right)_0=\frac{v_{lim}-v_0}{\tau-0}$

Donc $\tau=\frac{v_{lim}-v_0}{a_0}$

Remarque 1: Expression mathématique dans le cas d'un frottement fluide laminaire

L'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{A} - \mathbf{B}\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{B}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}}.\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{dt}} + \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$ donc $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}$

Remarque 2 : τ est appelé **temps caractéristique** et $5.\tau$ correspond à l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, temps au bout duquel la vitesse limite est en fait atteinte.

4°) Résolution de l'équation différentielle par une méthode numérique itérative : la méthode d'Euler

a) Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique permettant de donner une solution approchée de l'équation différentielle du mouvement de G, lors d'une chute verticale avec frottement.

- L'équation du mouvement est : $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{A} - \mathbf{B}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{n}}$ $\quad avec \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{g} - \frac{\boldsymbol{\rho}_\mathbf{f}.\mathbf{V}.\mathbf{g}}{\mathbf{m}} \\ \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \end{cases}$

- On considère des dates t_i séparées par une durée constante Δt, appelée **le pas**. La vitesse et l'accélération, calculées à la date t_i, sont notées v_i et a_i. Connaissant la valeur de v_i, on déduit de l'équation différentielle celle de a_i : $\quad \boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{A} - \mathbf{B}.\boldsymbol{v_i^n}$

- On fait alors l'approximation suivante, si Δt est petit : $a_{i-1} = \frac{dv_X}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t}$

soit $\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{a_{i-1}}.\boldsymbol{\Delta t} + \boldsymbol{v_{i-1}}$

Si on connaît v_0 , à la date t = 0, il est donc possible de calculer la suite des valeurs v_i de la vitesse.

Etape	t_i	v_i		a_i	
0	$t_0 = 0$	⓿	v_0	❶	$a_0 = A - B.v_0^n$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	❷	$v_1 = a_0.\Delta t + v_0$	❸	$a_1 = A - B.v_1^n$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	❹	$v_2 = a_1.\Delta t + v_1$	❺	$a_2 = A - B.v_2^n$
3	$t_3 = t_2 + \Delta t$	❻	$v_3 = a_2.\Delta t + v_2$	❼	$a_3 = A - B.v_3^n$
4	$t_4 = t_3 + \Delta t$	❽	$v_4 = a_3.\Delta t + v_3$	❾	$a_4 = A - B.v_4^n$

Pour établir l'équation différentielle, il faut proposer un modèle pour les forces de frottement. La résolution de l'équation différentielle décrivant l'évolution de la vitesse donne une solution que l'on confronte aux résultats expérimentaux. Cela permet de valider ou non la modélisation.

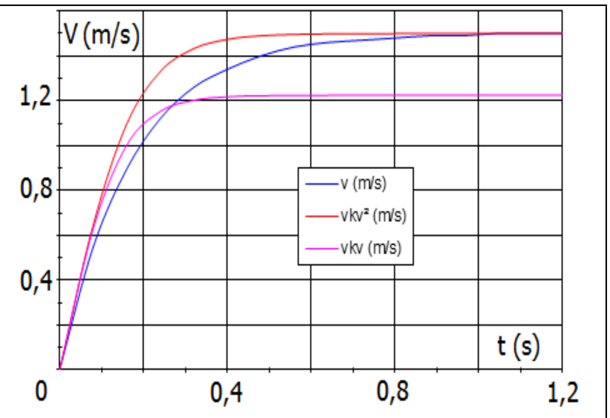
Remarque :

Plus le pas Δt est petit, plus les mesures sont précises, mais plus le nombre de calculs à effectuer est important pour une même expérience.

Application : comparaison des résultats expérimentaux et modélisés

- La solution numérique utilisant une force de frottement de type laminaire convient mieux que celle utilisant une force de frottement de type turbulent au début de la chute : la courbe de cette solution (force de frottement laminaire) est en effet plus près de la courbe expérimentale que l'autre courbe.
- En revanche, pour des vitesses plus élevées, la solution numérique utilisant une force de frottement de type turbulent convient mieux que celle utilisant une force de frottement de type laminaire.

Conclusion : La comparaison des courbes expérimentale et modélisée permet de déterminer le domaine de validité du modèle.



Compétences-exigibles

- Définir un champ de pesanteur uniforme.
- Connaître les caractéristiques de la poussée d'Archimède.
- Chute verticale avec frottement
- Appliquer la deuxième loi de Newton à un corps en chute verticale dans un fluide et établir l'équation différentielle du mouvement, la force de frottement étant donnée.
- Connaître le principe de la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle.
- Savoir exploiter des reproductions d'écrans d'ordinateur (lors de l'utilisation d'un tableur grapheur) correspondant à des enregistrements expérimentaux.
- Savoir exploiter des courbes v =f(t) pour :

- reconnaître le régime initial et/ou le régime asymptotique.
- évaluer le temps caractéristique correspondant au passage d'un régime à l'autre.
- déterminer la vitesse limite.

- Dans le cas de la résolution par méthode itérative de l'équation différentielle, discuter de la pertinence des courbes obtenues par rapport aux résultats expérimentaux (choix du pas de résolution, modèle proposé pour la force de frottement)