PHYSIQUE / Unité :3
Évolution temporelle des systèmes électriques

Chapitre II
Dipôle R.L.

I- La bobine d'une bobine.

1- Définition

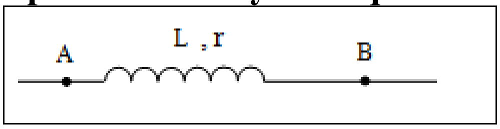
Une bobine est un dipôle, constitué par un enroulement cylindrique d'un fil conducteur recouvert d'une couche isolante (gaine ou vernie) .

- Une bobine est caractérisée par son :

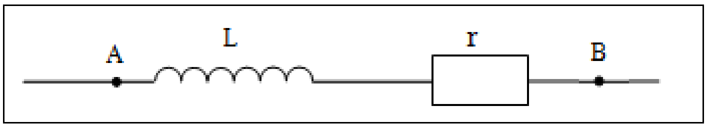
inductance **L** exprimée en Henry (symbole H)

et sa résistance interne **r** exprimée en Ohm**.**

2- Représentation symbolique d'une bobine



ou



3- Expression de la tension aux bornes d'une bobine

- La bobine étant orientée de A vers B, la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine est donnée par la relation :

Si la résistance de la bobine n'est pas négligeable, celle-ci peut être considérée comme l'association en série d'un conducteur ohmique et d'une bobine de résistance nulle.

$u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + r.i(t)$ Avec
$\begin{cases} u_L(t)\text{: tension aux bornes de la bobine en Volts (V).} \\ \text{L: inductance de la bobine en Henrys (H).} \\ \text{r : résistance de la bobine en Ohm } (\Omega). \\ \text{i(t): intensité du courant traversant la bobine en Ampéres (A).} \end{cases}$

Remarque : Les différents comportements d'une bobine

⇨ Lorsque l'intensité du courant traversant la bobine est constante, la tension à ses bornes vaut :$u_L(t) = r.i(t)$

⇨ si l'intensité du courant augmente, i(t) est une fonction croissante du temps, donc la $u_L(t)$ augmente;

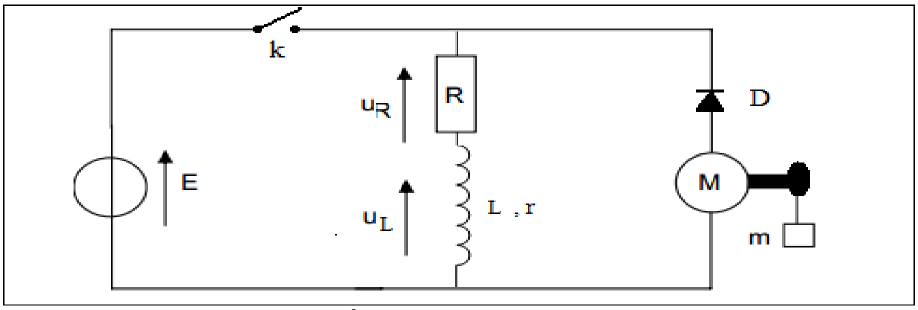
⇨ Si la variation de i(t) est très rapide , $\dfrac{di(t)}{dt}$ peut prendre une valeur très importante ; il en est de même de $L\dfrac{di(t)}{dt}$; une tension important peut alors apparaître aux bornes de la bobine . C'est le phénomène de surtension.

Cette surtension momentanément provoque une étincelle aux bornes de l'interrupteur, pouvant être dangereuse pour les composants du circuit. Un système de protection est indispensable (diode, condensateur …)

II- Energie emmagasinée par la bobine

1- Mise en évidence expérimentale

On réalise un circuit électrique comportant en série un conducteur ohmique de résistance R, une bobine (B) d'inductance L et de résistance interne supposée nulle un interrupteur K et un moteur (M). Le circuit est alimenté par un générateur de tension de force électromotrice (f.e.m) E



Une fois le courant établi dans la branche comportant le dipôle RL, À l'ouverture de l'interrupteur, le moteur tourne en soulevant la masse marquée : la bobine est à l'origine de l'établissement d'un courant électrique dans le circuit, elle avait donc auparavant emmagasiné de l'énergie.

2- Expression d'énergie emmagasinée par la bobine

On a $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + r.i(t)$

Donc la puissance fournie à la bobine $P = u_L(t).i(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}.i(t) + r.[i(t)]^2$ avec

Pendant l'établissement du courant dans le circuit, l'énergie fournie par la source est : $\int_0^t u_L\, i(t)\, dt = \int_0^t R\, i(t)^2\, dt + \int_0^t L\, i(t) \frac{di(t)}{dt} dt$. On voit que cette énergie est consommée en partie par effet Joule dans le conducteur ohmique et en partie stockée dans la bobine sous forme d'énergie électromagnétique (magnétique).

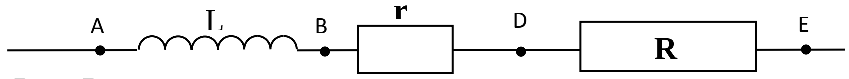
L'énergie stockée dans la bobine est $E_m(t) = \int_0^t L\, i(t)\, di(t)$.

L'énergie électromagnétique stockée dans la bobine d'inductance L parcourue par un courante d'intensité i(t) est $E_m(t) = \frac{1}{2}.L\, i(t)^2$.

III- Réponse d'un dipôle (R,C) à un échelon de tension

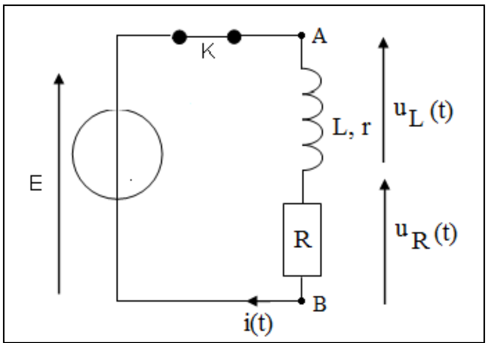
1-Le dipôle RL

Un dipôle RL est constitué de l'association d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine de résistance interne r et d'inductance L.



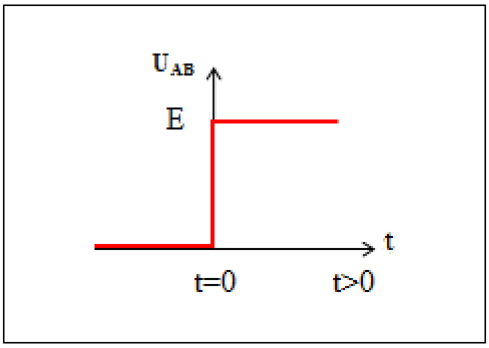
Un dipôle RL a donc pour résistance totale : $R_T = R + r$

2- L'échelon de tension



Un dipôle RL subit un échelon de tension lorsque l'on ferme l'interrupteur du circuit dans lequel un générateur de tension continue (E) est branché en dérivation aux bornes du dipôle RL. La tension u_{AB} passe brutalement de 0 V à E V.

Établissement du courant



3- Etablissement de l'équation différentielle

A la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du dipôle RL passe brutalement de 0 V à E V.

D'après la loi d'additivité des tensions :

$u_L + u_R = E$

$$L\frac{di(t)}{dt} + r.i(t) + R.i(t) = E$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + (r+R)i(t) = E$$

$$\frac{L}{R+r}.\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R+r}$$

4-Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle linéaire du premier ordre en i(t) à coefficients constants et avec second membre non nul peut admettre comme solution : $i(t) = A + B.e^{-t/\tau}$ où A, B et m sont des constantes à déterminer.

<u>Détermination de A et τ à partir de l'équation différentielle</u>

❍ Dans un premier temps, on dérive $i(t) = A + B.e^{-t/\tau}$ (Rappel : $f(x) = ae^{-\frac{x}{b}}$ alors $f'(x) = -\frac{a}{b}e^{-\frac{x}{b}}$)

$$\frac{di}{dt} = 0 - \frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

❍ Dans un deuxième temps, on reporte i et $\frac{di(t)}{dt}$ dans l'expression $\frac{L}{R+r}.\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R+r}$

$$\frac{E}{R+r} = A + Be^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{L}{(R+r)}\left[-\frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$\frac{E}{R+r} = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{L}{(R+r).\tau}\right]$$

❍ Dans un troisième temps, on identifie A et τ.

Pour que l'équation différentielle soit vérifiée à tout instant, il faut s'affranchir du temps, c'est à dire éliminer le terme qui dépend du temps :

$\frac{E}{R+r} = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{L}{(R+r).\tau}\right]$ Il suffit que $\left[1 - \frac{L}{(R+r).\tau}\right] = 0$

Alors : $\tau = \frac{L}{R+r}$ la constante de temps

et $A = \frac{E}{R+r}$

Détermination de B à partir des conditions initiales

Avant la fermeture de l'interrupteur, l'intensité du courant est supposée nulle.

On prend en compte les conditions initiales à $t = 0$, à $t = 0$ *on a* $i(0) = 0$

$$i(t) = A + Be^{-\frac{0}{\tau}} = 0$$

Soit $A + B = 0$ car $e^{-\frac{0}{\tau}} = 1$ Donc $B = -A$ *Alors* $B = -\frac{E}{R+r}$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$i = \frac{E}{R+r} - \frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}} == \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R+r}$$

Remarque : La solution obtenue est une fonction croissante de 0 à $\frac{E}{R+r}$.

Contrairement à l'évolution du courant pour un dipôle RC soumis à un échelon de tension, l'intensité est continue en t = 0.

Intensité électrique: L'intensité électrique étant définie par : $i(t) = I_P.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, avec $I_P = \frac{E}{R+r}$:

On peut déterminer la constante de temps :

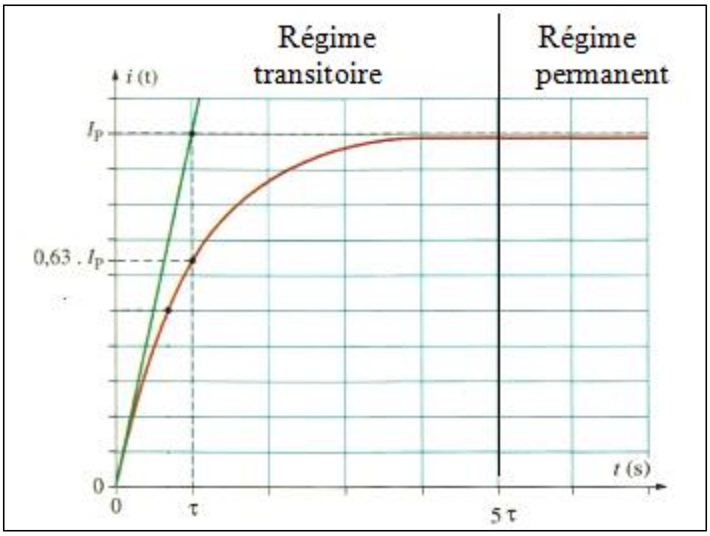
✦ **Par calcul** si on connaît les valeurs des résistances (du conducteur ohmique et de bobine) et de l'inductance de la bobine.

✦ **Graphiquement** à partir du graphique i = f(t) :

- Le graphique i = f(t) ayant comme équation $i(t) = I_P.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, nous avons à t = τ :

$i(t) = I_P.(1 - e^{-1})$ soit $i(\tau) = 0{,}63.I_P$.

- Le tracé de la tangente au graphique i = f(t) à t = 0 permet de mettre en évidence un point d'intersection entre l'asymptote à la courbe et la tangente ; l'abscisse de ce point d'intersection a pour valeur : t = τ.



Vérification de l'unité de la constante de temps par analyse dimensionnelle.

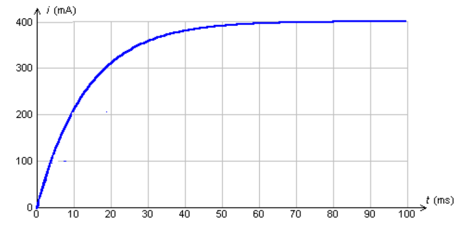
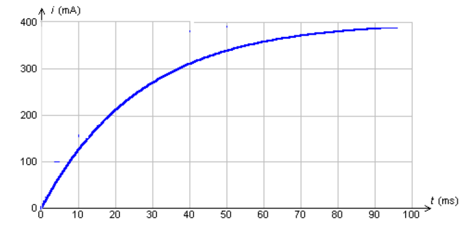
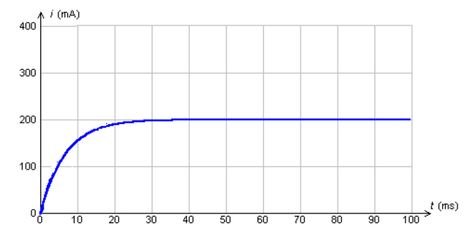
D'après la loi d'Ohm, $u = Ri$ soit $R = \frac{u}{i}$; La dimension de R s'écrit $[R] = \left[\frac{U}{I}\right] = \frac{[U]}{[I]}$

A partir de l'expression $u_L = L\frac{di}{dt}$; La dimension de $[L] = \frac{[U]\cdot[T]}{[I]}$

La dimension de $\left[\frac{L}{R}\right]$ est : $\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[U]\cdot[T]}{[I]} \times \frac{[I]}{[U]}$ après simplification $\left[\frac{L}{R}\right] = [T]$

La constante de temps à la dimension d'un temps son unité est la seconde (s).

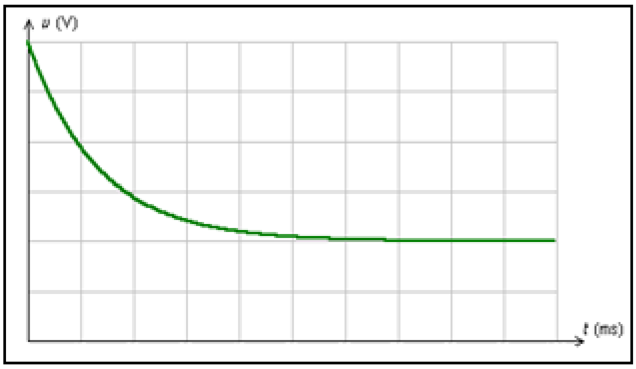
6- Influence des caractéristiques du circuit sur la constante de temps lors de l'établissement d'un courant

E= 6 V;r = 5 Ω ; R = 10 Ω et L = 200 mH	E= 6 V; r = 5 Ω ; R = 10 Ω L = 400 mH	E= 6 V; r = 5 Ω ; R = 25 Ω L = 200 mH
		

7- Evolution de la tension aux bornes de la bobine

La tension aux bornes de la bobine est définie par : $\begin{cases} u_L(t) = L.\dfrac{di(t)}{dt} + r.i(t) \\ u_L(t) + u_R(t) = E \Leftrightarrow u_L(t) = E - R.i(t) \end{cases}$

en utilisant la relation $u_L(t) = E - R.i(t)$



On a $i = \dfrac{E}{R+r} - \dfrac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

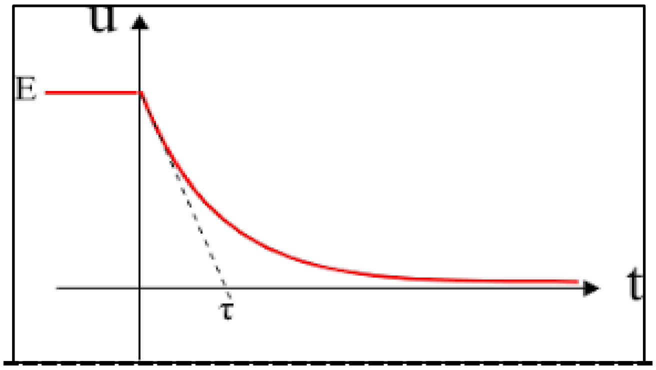
$u_L(t) = E - R\dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

Si la bobine est idéale (r ≈ 0), la tension aux bornes de la bobine $u_L(t)$ tend vers 0.

$u_L(t) = E - R\dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

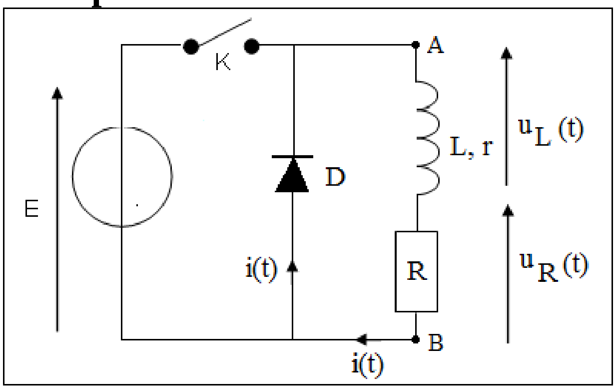
$u_L(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{L}{R}$

Contrairement à la courbe i(t), la courbe de $u_L(t)$ présente une discontinuité à l'instant t = 0, correspondant à la fermeture du circuit.

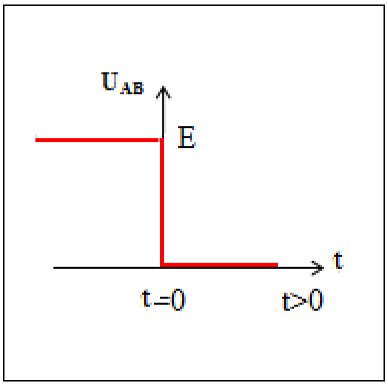


IV - Etude de la réponse d'un dipôle RL à une rupture du courant

1- Rupture du courant



Un dipôle RL subit une rupture de courant lorsque l'on ouvre brutalement l'interrupteur du circuit dans lequel un générateur de tension continue (E) est branché en dérivation aux bornes du dipôle RL. La tension u_{AB} passe brutalement de E à 0 V.
la rupture du courant



2- Etablissement de l'équation différentielle

A l'ouverture de l'interrupteur, la tension aux bornes du dipôle RL passe brutalement de E V à 0 V.

D'après la loi d'additivité des tensions :

$u_L + u_R = 0$

$$L\frac{di(t)}{dt} + r.i(t) + R.i(t) = 0$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+(r+R)i(t)=0$$

$$\frac{L}{R+r}.\frac{di(t)}{dt}+i(t)=0$$

3- Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle linéaire du premier ordre en i(t) à coefficients constants et avec second membre non nul peut admettre comme solution : $i(t)=A+B.e^{-t/\tau}$ où A, B et m sont des constantes à déterminer.

<u>Détermination de A et τ à partir de l'équation différentielle</u>

❍ Dans un premier temps, on dérive $i(t)=A+B.e^{-t/\tau}$ (Rappel : $f(x)=ae^{-\frac{x}{b}}$ alors $f'(x)=-\frac{a}{b}e^{-\frac{x}{b}}$)

$$\frac{di}{dt}=0-\frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

❍ Dans un deuxième temps, on reporte *i* et $\frac{di(t)}{dt}$ dans l'expression $\frac{L}{R+r}.\frac{di(t)}{dt}+i(t)=0$

$$\frac{L}{(R+r)}\left[-\frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]+A+Be^{-\frac{t}{\tau}}=0$$

$$Be^{-\frac{t}{\tau}}\left[1-\frac{L}{(R+r).\tau}\right]+A=0$$

❍ Dans un troisième temps, on identifie A et τ.

Pour que l'équation différentielle soit vérifiée à tout instant, il faut s'affranchir du temps, c'est à dire éliminer le terme qui dépend du temps :

$Be^{-\frac{t}{\tau}}\left[1-\frac{L}{(R+r).\tau}\right]+A=0$ Il suffit que $\left[1-\frac{L}{(R+r).\tau}\right]=0$

Alors : $\tau=\frac{L}{R+r}$ la constante de temps et $A=0$

<u>Détermination de B à partir des conditions initiales</u>

Avant l'ouverture de l'interrupteur, l'intensité du courant est égale à $i(0)==\frac{E}{R_T}$.

On prend en compte les conditions initiales à $t=0$, *on a* $\mathrm{i}(0)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R_T}}$.

$$i(t)=Be^{-\frac{0}{\tau}}=\frac{E}{R_T}$$

Soit $B=\frac{E}{R_T}$ car $e^{-\frac{0}{\tau}}=1$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$i(t)=\frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau=\frac{L}{R+r}$$

Remarque : La solution obtenue est une fonction décroissante de $\frac{\mathrm{E}}{R+r}$ à 0.

Contrairement à l'évolution du courant pour un dipôle RC soumis à un échelon de tension, l'intensité est continue en t = 0.

<u>Intensité électrique</u>: L'intensité électrique étant définie par : $i(t)=I_P.e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $I_P=\frac{E}{R+r}$:

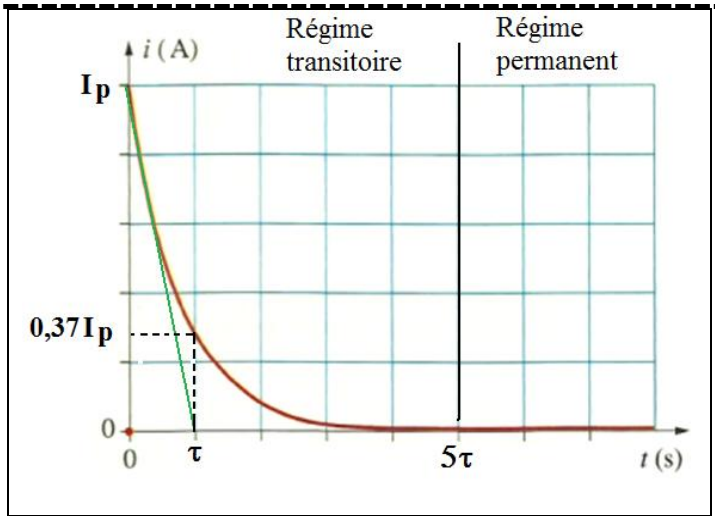
On peut déterminer la constante de temps :

✦ **Par calcul** si on connaît les valeurs des résistances (du conducteur ohmique et de bobine) et de l'inductance de la bobine.

✦ **Graphiquement** à partir du graphique i = f(t) :

- Le graphique i = f(t) ayant comme équation $i(t) = I_P.e^{-\frac{t}{\tau}}$, nous avons à t = τ : $i(\tau) = I_P.e^{-1}$ soit $i(\tau) = 0{,}37.I_P$

Le tracé de la tangente au graphique i = f(t) à t = 0 permet de mettre en évidence un point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente ; l'abscisse de ce point d'intersection a pour valeur : t = τ



4- Evolution de la tension aux bornes de la bobine

La tension aux bornes de la bobine est définie par : $\begin{cases} u_L(t) = L.\dfrac{di(t)}{dt} + r.i(t) \\ u_L(t) + u_R(t) = 0 \Leftrightarrow u_L(t) = -R.i(t) \end{cases}$

en utilisant la relation $u_L(t) = -R.i(t)$

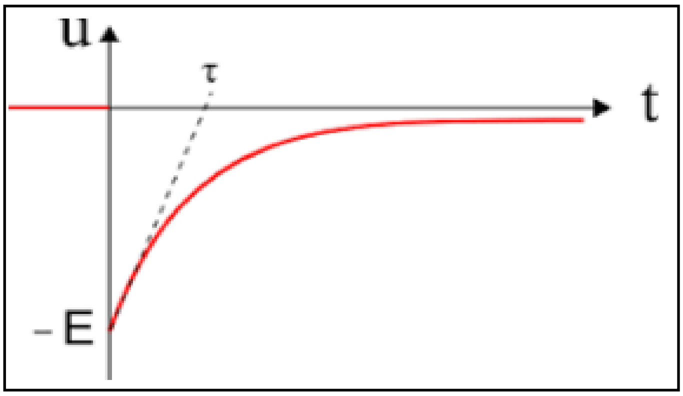
On a $i = \dfrac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_L(t) = -R\dfrac{E}{R+r}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

✦ Si la bobine est idéale (r ≈ 0), la tension aux bornes de la bobine $u_L(t)$ tend vers 0.

$u_L(t) = R\dfrac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_L(t) = -E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{L}{R}$



Connaissances - Compétences

➢ Effectuer la résolution analytique pour l'intensité du courant dans un dipôle RL soumis à un échelon de tension.

➢ En déduire la tension aux bornes de la bobine. Connaître l'expression de la constante de temps et savoir vérifier son unité par analyse dimensionnelle.

➢ Connaître l'expression de l'énergie emmagasinée.

➢ Savoir qu'une bobine s'oppose aux variations du courant du circuit où elle se trouve et que l'intensité de ce courant ne subit pas de discontinuité.

➢ Savoir exploiter un document expérimental pour:
- identifier les tensions observées.
- montrer l'influence de R et de L lors de l'établissement et de la disparition du courant
- déterminer une constante de temps.

➢ Savoir-faire expérimentaux
- Réaliser un montage électrique à partir d'un schéma.
- Réaliser les branchements pour visualiser les tensions aux bornes du générateur, de la bobine et du conducteur ohmique supplémentaire.
- Montrer l'influence de l'amplitude de l'échelon de tension, de R et de L sur le phénomène observé.