ROTATION D'UN SOLIDE INDEFORMABLE AUTOUR D'UN AXE FIXE

I - Définition du mouvement de rotation autour d’un axe fixe.

1 - Définition

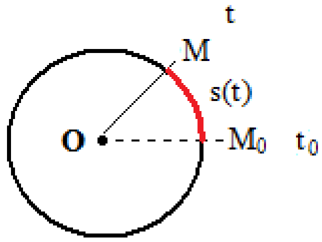
Un solide indéformable possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe si le mouvement de chacun de ses points est circulaire centré sur l'axe de rotation.
exemple : mouvement d’une roue de vélo par rapport à son axe de rotation

2 –Remarques sur mouvement de rotation d’un solide indéformable.

- Les points du solide situés sur l’axe de rotation, s’ils existent, sont immobiles
- La trajectoire de chaque point de solide appartient au plan perpendiculaire à l’axe de rotation.

II- Repérage d'un point M d’un solide en rotation par rapport à l’axe fixe (Δ).

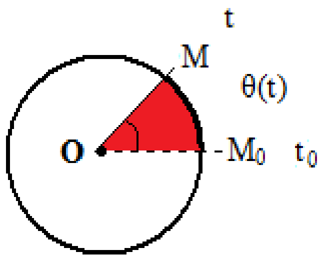
1 - Abscisse curviligne



Soit M un point quelconque d’un solide en rotation par rapport à (Δ). On oriente la trajectoire selon le sens du mouvement. On y choisit un point de référence M_0. La position du point mobile M, est repérée par son abscisse curviligne : $s(t) = \widehat{M_0M}$

Unité de l’abscisse curviligne est le mètre (m)

2 - Abscisse angulaire



On peut aussi repérer la position du mobile par l’abscisse angulaire θ qui mesure l'angle de la rotation depuis l'origine M_0 sur le cercle donc $\theta(t) = (\widehat{OM_0\,;\,OM})$

Unité de l’abscisse angulaire est le radian (rad)

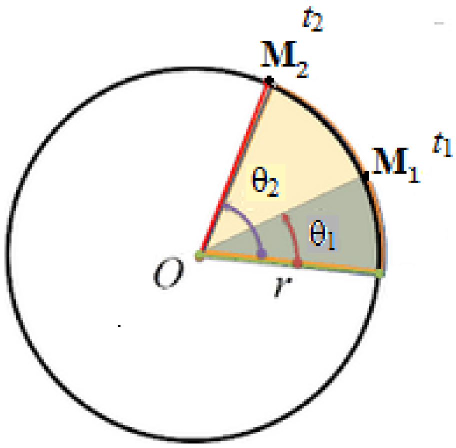
3 - Relation entre abscisse curviligne et abscisse angulaire :

Il existe une relation géométrique simple entre abscisse curviligne et abscisse angulaire :

$$s(t) = R.\theta(t)$$

tel que R le rayon de la trajectoire circulaire.

III - Vitesse d’un solide en rotation autour d’un axe fixe.



Pour décrire le mouvement de rotation d’un solide indéformable, il suffit d’étudier le mouvement de l’un de ses points n’appartenant pas à l’axe de rotation.
Soit M un point du solide en un mouvement de rotation autours de l’axe (Δ)

- à l’instant t_1 la position du point M est noté M_1
- à l’instant t_2 la position du point M est M_2.
-

1 -Vitesse angulaire

1-1 Vitesse angulaire moyenne

Au cours de la durée $\Delta t = t_2 - t_1$ le point M parcours l’arc $\widehat{M_1M_2}$ en décrivant l’angle $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ (angle de rotation du solide).
On appelle vitesse angulaire moyenne ω_m, le quotient de l'angle Δθ par l’intervalle de temps $t_2 - t_1$ mis pour effectuer cette rotation.

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

l’unité de la vitesse angulaire dans SI : rad/s

1-2- Vitesse angulaire instantané

La vitesse angulaire instantanée d'un solide à la date t, se définit comme la vitesse angulaire moyenne du solide pendant une brève durée autour de la date t.

$$\omega(t) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

Où δ indique une variation infinitésimale ou élémentaire.
(pratiquementen encadrent l'instant t entre deux instants t_{i-1} et t_{i+1} très proches)

Remarque

La vitesse angulaire ω est la même pour tous les points du solide indéformable en rotation autours d'un axe fixe. Elle est donc la vitesse angulaire du solide en rotation.

2 - Vitesse linéaire

La vitesse linéaire (vitesse tangentielle) du point M à l'instant *t* est le quotient de la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ parcouru par la durée Δt mise pour le faire :

$$v(t) = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

$$\widehat{M_1M_2} = s_2 - s_1 = \Delta s$$

Remarque : Si Δt est grand, on a les vitesses moyennes, si Δt est petit on a les vitesses instantanées.

3 - Relation entre vitesse angulaire et vitesse d'un point de solide

Pour un point M d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, situé à une distance R de l'axe de rotation, la distance parcourue pendant une durée $\Delta t = t_2 - t_1$ est $\widehat{M_1M_2} = s_2 - s_1 = \Delta s$.

De plus, $\Delta s = s_2 - s_1 = R.\theta_2 - R.\theta_2$

Ce qui permet d'écrire : $\Delta s = R.\Delta\theta$

$$\text{Donc } v = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{R.\Delta\theta}{t_2 - t_1} = R.\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{et comme}$$

$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ alors $v = R.\omega$

IV-Mouvement de rotation uniforme d'un solide autour d'un axe fixe.

1 –Définition d'un mouvement de rotation uniforme

Un solide indéformable est en mouvement de rotation uniforme si La vitesse angulaire ω est constante.

On remarque que les points mobiles d'un tel solide sont animés d'un mouvement circulaire uniforme.

2 - Equation horaire d'un mouvement circulaire uniforme

Considérons un point M ayant un mouvement circulaire uniforme de centre O, rayon R et de vitesse linéaire v. Le point M à une vitesse angulaire ω constante, on peut donc en déduire l'expression de l'angle $\theta(t)$ formé par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'axe (Ox) en fonction du temps : c'est l'équation horaire

L'équation horaire de l'abscisse angulaire du mouvement de rotation uniforme est :

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

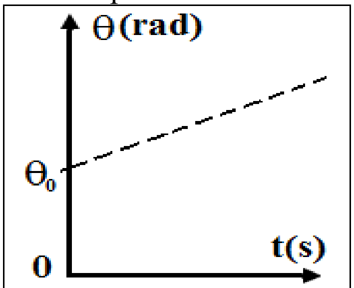
Avec : ω : vitesse angulaire
θ_0 : est l'angle initial à t=0.

L'équation horaire de l'abscisse curviligne est :

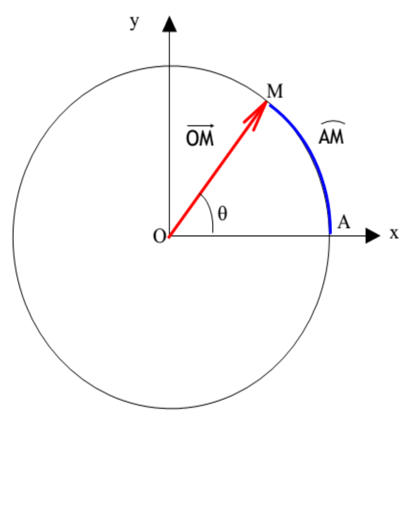
$$s(t) = V\,t + s_0$$

Avec : $s(t)$ l'abscisse curviligne de M à l'instant *t* ,
V : *sa* vitesse linéaire
s_0 , l'abscisse curviligne à t=0

ou



La courbe représentative de θ = f(t) est une droite affine, le coefficient directeur de cette droite représente la vitesse angulaire ω



3 - Les propriétés d'un mouvement circulaire uniforme

Si le mouvement de rotation est uniforme (ω est constante), le mouvement est périodique car la durée mise pour effectuer un tour est constante.

3- 1- La période.

La période T d'un mouvement de rotation uniforme est égale à la durée d'un tour.

Pour un tour on a $\Delta\theta = 2\pi$ rad, alors $\Delta t = T$ donc $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et alors $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec T en s et ω en rad.s^{-1}.

3- 2- La fréquence.

La fréquence f d'un mouvement de rotation uniforme est le nombre des périodes par seconde, donc le nombre des tours par seconde.

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ce qui donne également $\omega = 2\pi f$ avec f en hertz (Hz).

Remarque

On parle parfois de fréquence de rotation ou vitesse de rotation exprimée en tr.s^{-1} ou en tr.min^{-1} ce qui en réalité est une vitesse angulaire. ($1\,\text{tr.min}^{-1} = \frac{2\pi}{60}\,\text{rad.s}^{-1}$ et $1\,\text{tr.s}^{-1} = 2\pi\,\text{rad.s}^{-1}$).

fin